Varianta 039

Subiectul I

a) $\sqrt{\frac{2}{5}}$. b) $\frac{6}{\sqrt{14}}$. c) 2y=x+4. d) 3. e) 0 . f) a=cos60 , b=sin60.

Subiectul II

1. a) câtul x-1, restul 2. b) $\frac{1}{6}$. c) 1. d) 0. e) -3.

2. a) 2cos x +3 e^x. b) 3e-1-2cos1. c) $f''(x)>0, \forall x \in (0,\infty)$ d) 2cos1 +3e. e) $\frac{\ln 2}{4}$.

Subiectul III

a) Prima matrice are numai elemente distincte din multimea{1,2,……,9}, deci aparține lui M, iar a doua are şi elemente egale, deci nu aparține lui M.

b) determinantul este egal cu 0. c) A= $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, det(A)= $-24 \neq 0$

d) Dacă $B\in M$ şi $B^{-1} \in M$, atunci $BB^{-1}=I_3$. Dar B şi B^{-1} are numai elemente strict pozitive, deci B B^{-1} va avea numai elemente strict pozitive. Deci B $B^{-1} \neq I_3$ şi de aici rezulta că $B^{-1} \notin M$.

e) Din b) şi c) rezultă că mulțimea M conține matrice de rangul 2 şi 3. Se arată că M nu conține matrice de rangul 1 deoarece ar avea toate liniile (coloanele) proportionale.

f) $P_9=9!$.

g) Matricea de la punctual b) are determinantul nul , schimbând liniile între ele obținem 6 matrice cu determinantul nul. Pentru fiecare matrice astfel obținută schimbăm coloanele între ele şi obținem pentru fiecare matrice alte 6 matrice cu determinantul nul. Rezultă în total 36 matrice cu determinantul nul.

Subiectul IV

a) Relația $a_n<b_n$ este echivalentă cu $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+2}$ care este evident adevărată.

b) $a_2= \sqrt{2}$ şi $b_2=\sqrt{2+2} = 2$

c) $a_4> 1,9$ este echivaletă cu $\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\sqrt[4]{4}}} > 1{,}9$ sau $2+\sqrt[3]{3+\sqrt{2}} > 3{,}61$ sau

$3+\sqrt{2} > 4{,}173281$ sau $\sqrt{2} > 1{,}173281$ care este evidentă.

d) Pentru n=2 obtinem 8>5 , adevarata. Presupunand ca $2^{n+1} > n+3$ adevarata , avem de aratat ca $2^{n+2} > n+4$.

Avem $2^{n+2} > 2(n+3) > n+4$, deci inegalitatea este adevarata oricare ar fi $n \geq 2$

e) Relația $a_n<a_{n+1}$ este echivalentă cu $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+1}}$ care este adevărată.

Relația $b_n>b_{n+1}$ este echivalentă cu $\sqrt[n]{n+2} < \sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+3}}$ sau $2 > \sqrt[n+1]{n+3}$ sau $2^{n+1}>n+3$, demonstrată la punctul anterior.

f) Din $a_2 \leq a_n < b_n \leq b_2$ rezultă că şirurile (a_n) şi (b_n) sunt mărginite şi monotone, deci convergente.

g) Avem $0<b_n-a_n<\frac{\sqrt[n]{n+2}-\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+2}+\sqrt[n]{n}}$, $\forall n \geq 2$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ deci, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=a$ şi $a\in (1{,}9;2)$.